Ընդունելության քննություն - 2022 թ

10-րդ դասարան

Մաթեմատիկա

Առաջադրանքներ և լուծումներ

I Տարբերակ

1. **Կրճատել կոտորակը՝** $\frac{\boldsymbol{a^2+ab-2b^2}}{\boldsymbol{a^3+8b^3}}$:

Լուծում: $\frac{a^2+ab-2b^2}{a^3+8b^3} = \frac{(a-b)(a+2b)}{(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)} = \frac{a-b}{a^2-2ab+4b^2}$:

1.$a^2 + ab - 2b^2 = (a-b)(a+2b\ )$ 1միավոր

2.$a^3 + 8b^3 = (a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$ 1միավոր

2. **Լուծել համակարգը՝**

$$\begin{cases} \boldsymbol{2x^2 - 5x + 2 > 0} \\ \boldsymbol{|2x+1| + x - 4 \le 0} \end{cases}$$

Լուծում: Առաջին անհավասարման լուծումներն են՝ $x \in (-\infty, 0{,}5) \cup (2, +\infty)$: 0,5միավոր

Երկրորդ անհավասարումը լուծենք հետևյալ կերպ.

$$|2x+1| \le 4 - x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x+1 \le 4-x \\ 2x+1 \ge x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x \ge -5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-5; 1)$$

1,5 միավոր

Հատելով ստացված երկու բազմությունները ստանում ենք՝ $x \in [-5; 0{,}5)$: 0,5 միավոր

Պատ.՝ $x \in [-5; 0{,}5)$:

3. (b_n) երկրաչափական պրոգրեսիայում՝ $b_4 + b_8 = 136$, $b_1 + b_5 = 17$: Աշակերտը հաշվել է b_4 և b_7 թվերը, որից հետո այդ երկու թվերի միջև տեղադրել է 22 հատ թիվ այնպես, որ b_4 և b_7 թվերը այդ տեղադրած թվերի հետ կազմեն թվաբանական պրոգրեսիա: Գտնել տեղադրված 22 թվերի գումարը:

Լուծում: Դիցուք q-ն տրված երկրաչափական պրոգրեսիայի հայտարարն է: Ունենք՝

$136 = b_4 + b_8 = b_1q^3 + b_5q^3 = 17q^3$ 0,5 միավոր

$$\Longrightarrow \quad q^3 = 8 \ \Longrightarrow q = 2:$$

Հետևաբար՝ $17 = b_1 + b_5 = b_1 + b_1 2^4 = 17b_1$, որտեղից կստանանք՝ $b_1 = 1$: Այստեղից ստանում ենք, որ $b_4 = 1 \cdot 2^3 = 8$, $b_7 = 1 \cdot 2^6 = 64$: 1միավոր

Այսպիսով, 8 և 64 թվերի միջև տեղադրված է 22 թիվ, որոնք այդ թվերի հետ միասին կազմում են թվաբանական պրոգրեսիա: Նշված 22 թվերի ամենափոքր և ամենամեծ թվերի գումարը կլինի 64+8=72: Հետևաբար, օգտվելով թվաբանական պրոգրեսիայի անդամների գումարի բանաձևից, կստանանք, որ այդ 22 թվերի գումարը հավասար է $\frac{64+8}{2} \cdot 22 = 792$: 1միավոր

Պատ.՝ 792:

4. a −ի ի՞նչ ամբողջ արժեքների դեպքում $(a+1)x^2-(a+2)x+2=0$ հավասարումն ունի երկու իրարից տարբեր արմատ, որոնց գումարը ամբողջ թիվ է:

Լուծում: Նշենք, որ $a=-1$ դեպքը չի բավարարում, քանի որ այդ դեպքում հավասարումն ունի ճիշտ մեկ արմատ: Եթե $a\neq-1$, ապա տրված հավասարումը քառակուսի հավասարում է: Որպեսզի այդ հավասարումն ունենա երկու արմատ անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա տարբերիչը լինի դրական, այսինքն՝

$$(a+2)^2-8(a+1)>0,$$

որը կարելի է գրել հետևյալ կերպ.

$$a^2-4a-4>0 \qquad (1)$$

Դիցուք x_1 և x_2 թվերը տրված քառակուսի հավասարման արմատներն են: Այդ դեպքում, օգտվելով Վիետի թեորեմից, ստանում ենք, որ $x_1+x_2=\frac{a+2}{a+1}=1+\frac{1}{a+1}$: Որպեսզի ստացված թիվը լինի ամբողջ անհրաժեշտ է և բավարար, որ 1-ը բաժանվի $a+1$-ի: Այսինքն՝ $a+1=1$ կամ $a+1=-1$: Հետևաբար՝ $a=0$ կամ $a=-2$: Մնում է ստուգել (1) պայմանը նշված արժեքների համար:

Պատ.՝ $a=-2$:

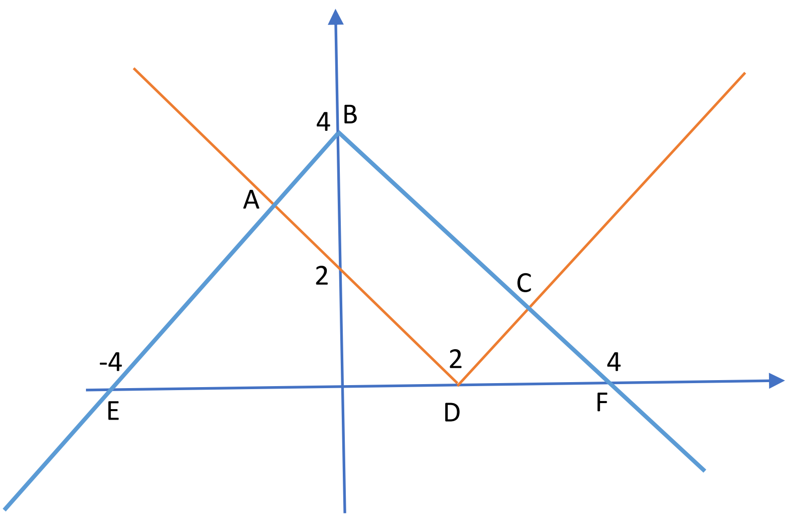
1. $a\neq-1$, $a^2-4a-4>0$, $x_1+x_2=\frac{a+2}{a+1}$ 1 միավոր

2. $a=0$ կամ $a=-2$: 1 միավոր

3. $a=-2$: 0,5 միավոր

5. Գտնել $y=|x-2|$ և $y=4-|x|$ ֆունկցիաների գրաֆիկներով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

Լուծում: Գծենք նշված ֆունկցիաների գրաֆիկները.



1 միավոր

Մեզ անհրաժեշտ է գտնել $ABCD$ ուղղանկյան մակերեսը: Ունենք՝

$$S_{ABCD}=S_{EBF}-S_{EAD}-S_{CDF}=4^2-3^2-1^2=6:$$ 1.5 միավոր

Պատ.՝ 6:

II Եղանակ: Կարող էինք նաև հաշվել AD և CD հատվածների երկարությունները՝ $AD=3\sqrt{2}$, $CD=\sqrt{2}$, որից հետո կստանանք՝ $S_{ABCD}=3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=6$: 1.5 միավոր

6. Քանի՞ եղանակով է հնարավոր 1, 2, …, 45 թվերից ընտրել երեք թիվ այնպես, որ նրանցից ցանկացած երկուսի տարբերությունը չբաժանվի 5-ի։

Լուծում: Սկզբում գտնենք այն բոլոր (a, b, c) կարգավորված եռյակների քանակը, որոնք բավարարում են խնդրի մեջ նշված պայմաններին։ a թիվը կարելի է ընտրել 45 եղանակով։ 0,5 միավոր

Քանի որ 1, 2, …, 45 թվերի մեջ կա a-ից տարբեր և 8 հատ թիվ, որոնցից յուրաքանչյուրը a-ի հետ ունի նույն մնացորդը 5-ի բաժանելիս, ապա b թիվը կարելի է ընտրել 45-9=36 եղանակով։ c-ն կարելի է ընտրել 36-9=27 եղանակով։ Այսպիսով, նշված պայմաններին բավարարող կարգավորված եռյակների քանակը կլինի $45 \cdot 36 \cdot 27$։ 1միավոր

Հետևաբար 1, 2, …, 45 թվերից նշված պայմանին բավարարող երեք հատ թիվ կարելի է ընտրել $\frac{45 \cdot 36 \cdot 27}{6} = 7290$ եղանակով։ 1միավոր

Պատ.՝ 7290։

II Լուծում: 1, 2, …, 45 թվերը բաժանենք 5 բազմությունների այնպես, որ յուրաքանչյուր բազմության տարրերը այն թվերն են, որոնք 9-ի վրա բաժանելիս տալիս են միևնույն մնացորդը։ 0,5 միավոր

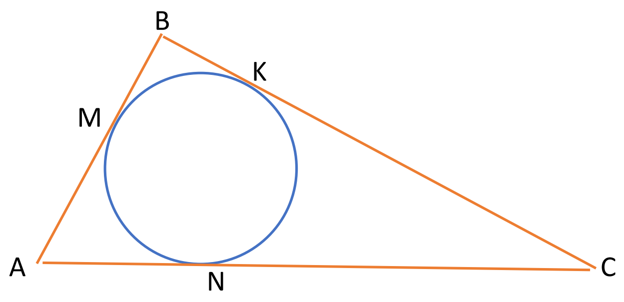
Այդ բազմություններից որևէ երեքի համար (a, b, c) եռյակների քանակը հավասար է

$9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3$, 1 միավոր

իսկ բաժանված բազմությունների եռյակների քանակը հավասար է C_5^3, հետևաբար խնդրի պայմանին բավարարող եռյակների քանակը հավասար է՝ $C_5^3 \cdot 9^3 = 7290$։

1 միավոր

7. ABC եռանկյանը ներգծած է շրջանագիծ, որը AB և AC կողմերը շոշափում է համապատասխանաբար M և N կետերում։



Հայտնի է, որ $AB = 10$, $AC = 16$, $BC = 14$։

Գտնել

ա) BAC անկյան աստիճանային չափը,

բ) AM հատվածի երկարությունը,

գ) AMN եռանկյան մակերեսը։

Լուծում: ա) Օգտվելով կոսինուսների թեորեմից, ստանում ենք՝

$$14^2 = 10^2 + 16^2 - 2 \cdot 10 \cdot 16 \cdot cosA,$$

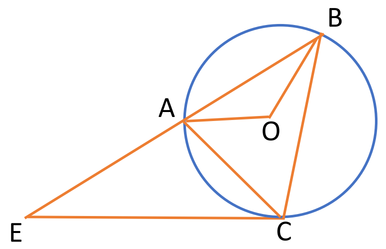
որտեղից՝ $cosA = 0{,}5$, ուստի $\angle A = \mathbf{60}°$։ 1 միավոր բ) Նշանակենք՝ $AM = x$: Այդ դեպքում՝ $AN = x$, $BK = BM = 10 - x$, $KC = CN = 16 - x$: Հետևաբար՝ $14 = BC = 10 - x + 16 - x$: Այսպիսով, $AM = x = \mathbf{6}$: 1 միավոր

գ) $S_{AMN} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot sin60° = \mathbf{9\sqrt{3}}$: 0,5 միավոր

8. ABC սուրանկյուն եռանկյան արտագծած շրջանագծի շառավիղը 10 սմ է, իսկ այդ շրջանագծի կենտրոնի հեռավորությունը AB կողմից՝ 5 սմ: C կետից շրջանագծին տարված շոշափողը BA ճառագայթի հետ հատվում է E կետում: Հայտնի է, որ $\angle AEC = 20°$: Գտնել

ա) ACB անկյան աստիճանային չափը,

բ) ABC անկյան աստիճանային չափը:



Լուծում: ա) Դիցուք O-ն շրջանագծի կենտրոնն է: Քանի որ նրա հեռավորությունը AB-ից 5 սմ է, իսկ $OA = 10$ սմ, ապա $\angle OAB = \angle OBA = 30°$: 0,5 միավոր

Հետևաբար՝ $\angle AOB = 120°$: Հետևաբար $\breve{AB}$ փոքր աղեղը 120° է, ուստի $\angle \boldsymbol{ACB} = \mathbf{60}°$: 0,5 միավոր

բ) Նշանակենք՝ $\angle ABC = x$: Այդ դեպքում $\breve{AC}$ փոքր աղեղի աստիճանային չափը կլինի $2x$: Հետևաբար, CE շոշափողով և CA լարով կազմված անկյունը կլինի՝ $\frac{1}{2} \cdot \breve{AC} = x$, այսինքն՝ $\angle ECA = x$: 1 միավոր

Քանի որ $\angle E = 20°, \angle ECA = x$, ապա $\angle CAB = x + 20°$: Այսպիսով, ABC եռանկյան անկյուններն են՝ $x + 20°, x, 60°$: Այժմ, օգտվելով եռանկյան անկյունների գումարի մասին թեորեմից, կունենանք՝ $2x + 80° = 180°$, որտեղից՝ $\angle ABC = x = \mathbf{50}°$:

0,5 միավոր

II Տարբերակ

1. Կրճատել կոտորակը՝ $\frac{a^2+2ab-3b^2}{a^3+27b^3}$:

   Լուծում: $\frac{a^2+2ab-3b^2}{a^3+27b^3} = \frac{(a-b)(a+3b)}{(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)} = \frac{a-b}{a^2-3ab+9b^2}$:

   1.$a^2 + 2ab - 3b^2 = (a-b)(a+3b)$)   1միավոր

   2.$a^3 + 27b^3 = (a+3b)(a^2 - 6ab + 9b^2)$ 1միավոր

2. Լուծել համակարգը՝

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x - 12 < 0 \\ |x-2| + 2x - 1 > 0 \end{cases}$$

   Լուծում: Առաջին անհավասարման լուծումներն են՝ $x \in (-1{,}5; 4)$: 0,5 միավոր

   Երկրորդ անհավասարումը լուծենք հետևյալ կերպ.

   $|x-2| > 1 - 2x \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{matrix} x - 2 > 1 - 2x \\ x - 2 < 2x - 1 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x > 1 \\ x > -1 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow x \in (-1; +\infty)$ 1 միավոր

   Հատելով ստացված երկու բազմությունները ստանում ենք՝ $x \in (-1; 4)$:

   0,5 միավոր

   Պատ.՝ $x \in (-1; 4)$:

3. (b_n) երկրաչափական պրոգրեսիայում՝ $b_5 + b_7 = 810$, $b_2 + b_4 = 30$: Աշակերտը հաշվել է b_2 և b_5 թվերը, որից հետո այդ երկու թվերի միջև տեղադրել է 22 հատ թիվ այնպես, որ b_2 և b_5 թվերը այդ տեղադրած թվերի հետ կազմեն թվաբանական պրոգրեսիա: Գտնել տեղադրված 22 թվերի գումարը:

   Լուծում: Դիցուք q-ն տրված երկրաչափական պրոգրեսիայի հայտարարն է: Ունենք՝

   $810 = b_5 + b_7 = b_2 q^3 + b_4 q^3 = 30q^3$ 0,5 միավոր

$$\Rightarrow \quad q^3 = 27 \quad \Rightarrow q = 3:$$

   Հետևաբար՝ $30 = b_2 + b_4 = b_2 + b_2 \cdot 3^2 = 10b_2$, որտեղից կստանանք՝ $b_2 = 3$: Այստեղից ստանում ենք, որ $b_5 = b_2 \cdot q^3 = 3 \cdot 3^3 = 81$: 1 միավոր

   Այսպիսով, 3 և 81 թվերի միջև տեղադրված է 22 թիվ, որոնք այդ թվերի հետ միասին կազմում են թվաբանական պրոգրեսիա: Նշված 22 թվերի ամենափոքր և ամենամեծ թվերի գումարը կլինի 3+81=84: Հետևաբար, օգտվելով թվաբանական պրոգրեսիայի անդամների գումարի բանաձևից, կստանանք, որ այդ 22 թվերի գումարը հավասար է $\frac{3+81}{2} \cdot 22 = 924$:   1 միավոր

   Պատ.՝ 924:

4. a –ի ի՞նչ ամբողջ արժեքների դեպքում $(a+2)x^2-(a+3)x+2=0$ հավասարումն ունի երկու իրարից տարբեր արմատ, որոնց գումարը ամբողջ թիվ է:

Լուծում: Նշենք, որ $a=-2$ դեպքը չի բավարարում, քանի որ այդ դեպքում հավասարումն ունի ճիշտ մեկ արմատ: Եթե $a\neq-2$, ապա տրված հավասարումը քառակուսի հավասարում է: Որպեսզի այդ հավասարումն ունենա երկու արմատ անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա տարբերիչը լինի դրական, այսինքն՝

$$(a+3)^2-8(a+2)>0,$$

որը կարելի է գրել հետևյալ կերպ.

$$a^2-2a-7>0 \qquad (1)$$

Դիցուք x_1 և x_2 թվերը տրված քառակուսի հավասարման արմատներն են: Այդ դեպքում, օգտվելով Վիետի թեորեմից, ստանում ենք, որ $x_1+x_2=\frac{a+3}{a+2}=1+\frac{1}{a+2}$: Որպեսզի ստացված թիվը լինի ամբողջ անհրաժեշտ է և բավարար, որ 1-ը բաժանվի $a+2$-ի: Այսինքն՝ $a+2=1$ կամ $a+2=-1$: Հետևաբար՝ $a=-1$ կամ $a=-3$: Մնում է ստուգել (1) պայմանը նշված արժեքների համար:

Պատ.՝ $a=-3$:

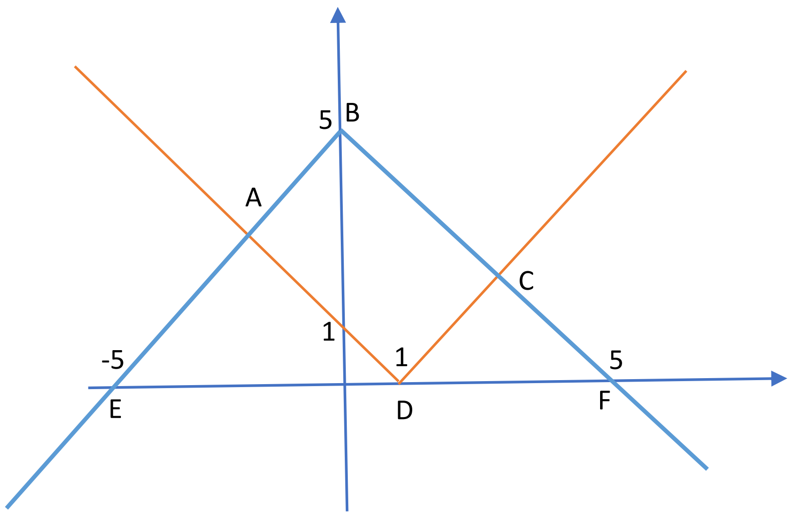
1. $a\neq-1$, $a^2-2a-7>0$, $x_1+x_2=\frac{a+3}{a+2}$ 1 միավոր

2. $a=-1$ կամ $a=-3$: 1 միավոր

3. $a=-3$: 0,5 միավոր

5. Գտնել $y=|x-1|$ և $y=5-|x|$ ֆունկցիաների գրաֆիկներով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

Լուծում: Գծենք նշված ֆունկցիաների գրաֆիկները.



1 միավոր

Մեզ անհրաժեշտ է գտնել $ABCD$ ուղղանկյան մակերեսը: Ունենք՝

$$S_{ABCD}=S_{EBF}-S_{EAD}-S_{CDF}=5^2-2^2-3^2=12:$$ 1,5 միավոր

Պատ.՝ 12:

II Եղանակ: Կարող էինք նաև հաշվել AD և CD հատվածների երկարությունները՝ $AD=3\sqrt{2}$, $CD=2\sqrt{2}$, որից հետո կստանանք՝ $S_{ABCD}=3\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}=12$: 1,5 միավոր

6. Քանի՞ եղանակով է հնարավոր 1, 2, …, 42 թվերից ընտրել երեք թիվ այնպես, որ նրանցից ցանկացած երկուսի տարբերությունը չբաժանվի 7-ի:

Լուծում: Սկզբում գտնենք այն բոլոր (a, b, c) կարգավորված եռյակների քանակը, որոնք բավարարում են խնդրի մեջ նշված պայմաններին: a թիվը կարելի է ընտրել 42 եղանակով: 0,5 միավոր

Քանի որ 1, 2, …, 42 թվերի մեջ կա a-ից տարբեր ևս 5 հատ թիվ, որոնցից յուրաքանչյուրը a-ի հետ ունի նույն մնացորդը 7-ի բաժանելիս, ապա b թիվը կարելի է ընտրել 42-6=36 եղանակով: c-ն կարելի է ընտրել 36-6=30 եղանակով: Այսպիսով, նշված պայմաններին բավարարող կարգավորված եռյակների քանակը կլինի $42 \cdot 36 \cdot 30$:

1 միավոր

Հետևաբար 1, 2, …, 42 թվերից նշված պայմանին բավարարող երեք հատ թիվ կարելի է ընտրել $\frac{42 \cdot 36 \cdot 30}{6} = 7560$ եղանակով: 1 միավոր

Պատ.՝ 7560:

II Լուծում: 1, 2, …, 42 թվերը բաժանենք 7 բազմությունների այնպես, որ յուրաքանչյուր բազմության տարրերը այն թվերն են, որոնք 7-ի վրա բաժանելիս տալիս են միևնույն մնացորդը: 0,5 միավոր

Այդ բազմություններից որևէ երեքի համար (a, b, c) եռյակների քանակը հավասար է

$6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$, 1 միավոր

իսկ բաժանված բազմությունների եռյակների քանակը հավասար է C_7^3, հետևաբար խնդրի պայմանին բավարարող եռյակների քանակը հավասար է՝ $C_7^3 \cdot 6^3 = 7560$:

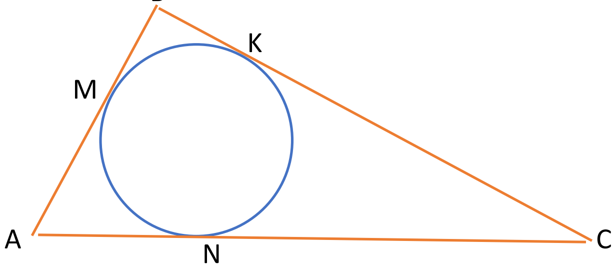
1 միավոր

7. ABC եռանկյանը ներգծած է շրջանագիծ, որը AB և AC կողմերը շոշափում է համապատասխանաբար M և N կետերում: Հայտնի է, որ $AB = 15$, $AC = 24$, $BC = 21$: Գտնել

ա) A անկյան աստիճանային չափը,

բ) AM հատվածի երկարությունը,

գ) AMN եռանկյան մակերեսը:



Լուծում: ա) Օգտվելով կոսինուսների թեորեմից, ստանում ենք՝

$$21^2 = 15^2 + 24^2 - 2 \cdot 15 \cdot 24 \cdot cosA,$$

որտեղից՝ $cosA = 0{,}5$, ուստի $\angle A = \mathbf{60}°$:

1 միավոր

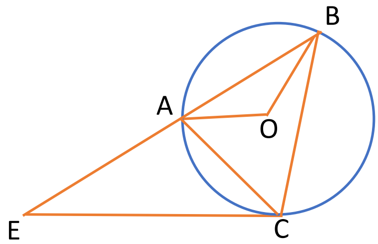
բ) Նշանակենք՝ $AM = x$: Այդ դեպքում՝ $AN = x$, $BK = BM = 15 - x$, $KC = CN = 24 - x$: Հետևաբար՝ $21 = BC = 15 - x + 24 - x$: Այսպիսով, $AM = x = \mathbf{9}$: 1 միավոր

գ) $S_{AMN} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot sin60° = \frac{\mathbf{81\sqrt{3}}}{\mathbf{4}}$: 0,5 միավոր

8. ABC սուրանկյուն եռանկյան արտագծած շրջանագծի շառավիղը 20 սմ է, իսկ այդ շրջանագծի կենտրոնի հեռավորությունը AB կողմից՝ 10 սմ: C կետից շրջանագծին տարված շոշափողը BA ճառագայթի հետ հատվում է E կետում: Հայտնի է, որ $\angle AEC = 10°$: Գտնել

ա) ACB անկյան աստիճանային չափը,

բ) ABC անկյան աստիճանային չափը:



Լուծում: ա) Դիցուք O-ն շրջանագծի կենտրոնն է: Քանի որ նրա հեռավորությունը AB-ից 10 սմ է, իսկ $OA = 20$ սմ, ապա $\angle OAB = \angle OBA = 30°$: 0,5 միավոր

Հետևաբար՝ $\angle AOB = 120°$: Հետևաբար $\breve{AB}$ փոքր աղեղը 120° է, ուստի $\angle \boldsymbol{ACB} = \mathbf{60}°$: 0,5 միավոր

բ) Նշանակենք՝ $\angle ABC = x$: Այդ դեպքում $\breve{AC}$ փոքր աղեղի աստիճանային չափը կլինի $2x$: Հետևաբար, CE շոշափողով և CA լարով կազմված անկյունը կլինի՝ $\frac{1}{2} \cdot \breve{AC} = x$, այսինքն՝ $\angle ECA = x$: 1 միավոր

Քանի որ $\angle E = 10°$, $\angle ECA = x$, ապա $\angle CAB = x + 10°$: Այսպիսով, ABC եռանկյան անկյուններն են՝ $x + 10°$, x, $60°$: Այժմ, օգտվելով եռանկյան անկյունների գումարի մասին թեորեմից, կունենանք՝ $2x + 70° = 180°$, որտեղից՝ $\angle ABC = x = \mathbf{55}°$:

0,5 միավոր